المحاضرة الرابعة

التكامل المحدد (Definite Integral)

درسنا في المحاضرة السابقة التكامل غير المحدد لأصناف عدة من التوابع، وسندرس في هذه المحاضرة التكامل المحدد لها.

مفهوم التكامل المحدد

ليكن f(x) تابعا مستمرا على المجال المعطى [a، b] (a>b أو a<b) وليكن F(x) تابعا أصليا لـ f(x) أي $F'(x)=f(x)$ من أجل $x\in[a,b]$. عندئذٍ يرمز للتكامل المحدد للتابع المستمر المعطى f(x) على المجال [a، b] بـ:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

ويمثل تزايد التابع الأصلي الموافق أي:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad (2)$$

وهي صيغة نيوتن ليبتنز.

بالإضافة إلى ذلك فإنه من أجل أي تابع f(x) لدينا في النقطة الكيفية a:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

أي أن العلاقة (2) صحيحة من أجل a=b.

يدعى a و b في العبارة (1) بحدود التكامل السفلي والعلوي أي بما يوافق حدود المجال [a،b]، ويدعى التابع f(x) بالتابع المكامل.

أوجد تكامل التابع x^2 على المجال [2،4]

$$\int_2^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=18\frac{2}{3}$$

نشير إلى أننا سنحصل على النتيجة نفسها لو أخذنا تابعا أصليا أخر لـ x^2 مثل $\frac{x^3}{3}+1$ أو $\frac{x^3}{3}-2$ أو...........

ملاحظة:

حيث أن الاختلاف بين التكامل المحدود والتكامل غير المحدد يكمن في أن التكامل المحدود هو عدد أما التكامل غير المحدد فهو دالة.

الخواص الرئيسية للتكامل المحدد:

-1
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

أي أن التكامل المحدد لا يتعلق بمتغير التكامل.

-2
$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

التكامل المحدد بحدود متساوية يساوي الصفر.

-3
$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx$$

إذا بدلنا بين موضعي حدود التكامل فإن التكامل المحدد يغير إشارته.

-4 ليكن $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$ حيث $a \le c \le b$ عندئذٍ بفرض أن $F'(x)= f(x)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + [F(b) - F(c)]$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

-5
$$\int_b^a \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \alpha \in R$$

-6
$$\int_b^a [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

تطبيقات التكامل المحدد

إن تطبيقات حساب التكاملات المحدد في الهندسة والميكانيك ذات أهمية خاصة، وتبرز هذه الأهمية في التطبيقات العملية المباشرة وخاصة في حساب مساحة السطوح المستوية المكتوبة بالشكل الديكارتي.

نظرية: إذا كان f تابعا مستمرا على الفترة $[a,b]$ عندئذٍ المساحة A للمنطقة D المحصورة بين منحني التابع ومحور السينات والمستقيمين $x=a, x=b$ تعطى بالعلاقة:

$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

وهنا نناقش الحالات الآتية:

1) إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن المنحني يكون فوق محور السينات وتكون قيمة التكامل موجبة وهي المساحة الفعلية كما في (1).

2) إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن المنحني يكون تحت محور السينات وقيمة التكامل تكون سالبة لذلك تعطى المساحة بالعلاقة:

$$A=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2)$$

3) إذا كان $f(x)\leq 0$ وبآن واحد $f(x)\geq 0$ أي المنحني يكون في فترات معينة فوق محور السينات وفي فترات أخرى تحت محور السينات وقيمة التكامل تأخذ قيم موجبة وسالبة ولا تعطي المساحة الفعلية المطلوبة لذلك نجمع المساحات تحت المنحني بإشارة موجبة كما في العلاقة (2)

مثال (1): أوجدي المساحة بين منحني الدالة $y=\cos x$ وبين:

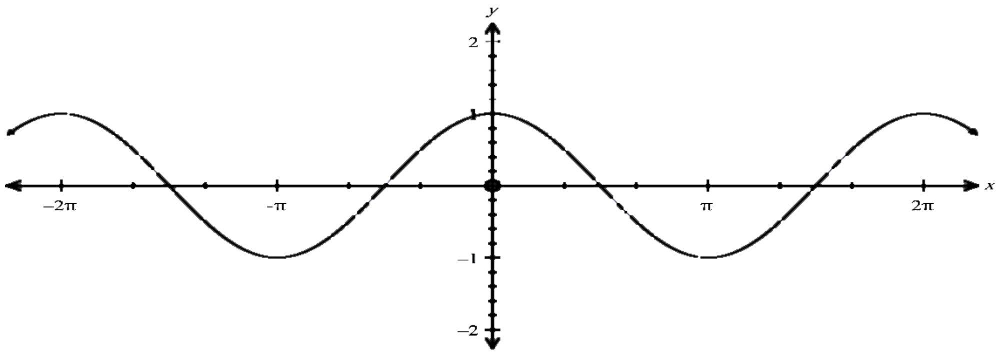
1- $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ ومحور السينات.

2- $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$ ومحور السينات.

3- $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=2\pi$ ومحور السينات.

4- $x=0$, $x=2\pi$ ومحور السينات.

الحل:



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2 \Rightarrow A_2 = |-2| = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 0 - (-1) = 1$$

$$A_4 = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

نلاحظ في الحالة (4) إن التكامل يساوي الصفر وهو المجموع الجبري لقيم التكاملات في (1) و (2) و (3) بالرغم من أن المساحة لها قيمة غير صفرية وهي مجموع المساحات الثلاثة بعد الأخذ بعين الاعتبار بأن تأخذ المساحة التي تقع تحت محور السينات بالقيمة الموجبة وبالتالي المساحة الفعلية

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + |-2| + 1 = 4$$

مثال (2): احسب المساحة المحصورة بين المستقيمات:

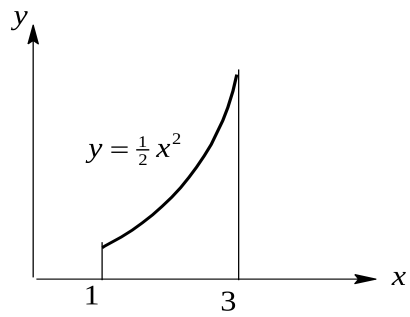
$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{9}{2} \; ; \; y = 0 \; , \; x = 1$$

الحل: إذا رمزنا للمساحة المحصورة بين المستقيمات المفترضة بالرمز A، لوجدنا أن: وحدة مربعة

مثال (3): احسب المساحة المحصورة بالمستقيمات $y = 0$، $x = 1$ و $x = 3$، وبالمنحني $y = \frac{1}{2} x^2$.

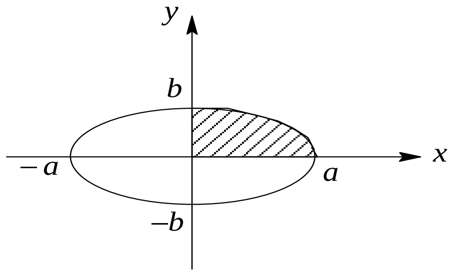
الحل: تعطى المساحة المحصورة بالمستقيمات السابقة والمنحني السابق، والموضحة بالشكل بالعلاقة:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{6}[x^3]_1^3 = \frac{13}{3}$$ وحدة مربعة



مثال (5): احسب مساحة القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

الحل: بما أن القطع الناقص متناظر بالنسبة للمحاور الإحداثية، لذلك يكفي حساب مساحة الجزء الواقع في الربع الأول، وضرب الناتج بـ 4.



تعطى مساحة القطع الناقص بالشكل الآتي: $A=4\int_0^a y\,dx$

من معادلة القطع الناقص، نجد: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (الجزء الواقع في الربع الأول)

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

بحل هذا التكامل بتغير المتحول بشكل مثلثي، بفرض أن $x=a\sin t$، فنجد:

$$S=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab \text{ وحدة مربعة}$$

تمارين غير محلولة

1) احسب التكاملات الآتية:

$$1)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad , \quad 2)\ \int_0^1 x^2 dx \quad , \quad 3)\ \int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$4)\ \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad , \quad 5)\ \int_0^{2\pi} x \sin 2x dx \quad , \quad 6)\ \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$$

2) احسب التكاملات الآتية بطريقة تغيير المتحول.

$$1)\ \int (2x+20)^{12} dx\ ,\ \ 2)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}} ,3)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^2},\ \ 4) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\ \ 5)\ \int \frac{dx}{x\ \ln x\ \ln(\ln x)}$$

3) ا حسب التكاملات الآتية بطرية التجزئة:

- **References:**

1) Mathematics for Engineers College Mathematics .R.A Barnett + M.R. Ziegler + K.E. Byleen (2008 edition).

2) College Mathematics: For Business، Economics، Life Sciences، and Social Sciences. R.A Barnett + M.R. Ziegler + K.E. Byleen

- Name: Soueycatt Mohamed
- Email: soueycatt55@hotmail.com

- إضافات مدرس المقرر